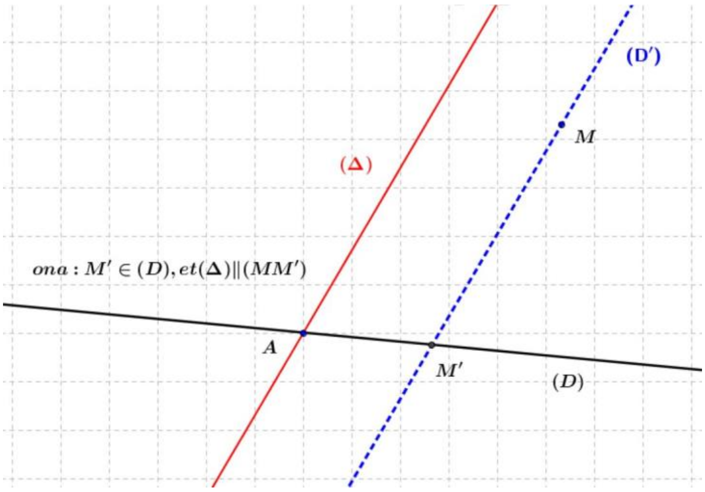
Cours la projection dans le plan avec Exercices avec solutions **PROF : ATMANI NAJIB**
Tronc CS

La projection dans le plan

I) La projection sur une droite parallèlement à une autre droite



1)Définition

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un pont A , et soit M un point du plan
La droite qui passe par M et parallèle a(Δ) coupe (D) en un point M'
le point M' s'appelle la projection du point M sur (D) parallèlement à (Δ) ou le projeté M sur (D) parallèlement a (Δ) ou l'Image du point M par la projection $P_{(D;\Delta)}$ sur (D) parallèlement à (Δ) et on écrit : $P_{(D;\Delta)}(M) = M'$ **ou** $P(M) = M'$

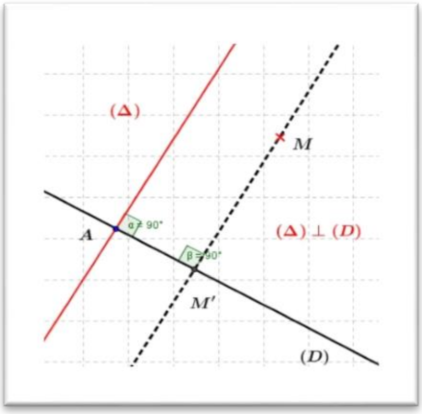
la droite (Δ) s'appelle la direction de la projection

$P(M) = M'$: M' l'Image du point M par la projection P

si $B \in (D)$ **alors** $P(B) = B$ on dit alors que le point B **est invariant par** la projection P

2. Propriétés

- Chaque point de (D) est confondu avec sa projection
- Est tout point confondu avec sa projection est un point de (D)
- On dit que la droite (D) est invariante par la projection sur (D) parallèlement à (Δ)



Cas particulier

Si les droite (D) et (Δ) sont perpendiculaire (on dit aussi orthogonales) on dit que M'est la projection orthogonale de M sur (D)

Exercice1 : Soit ABC est un triangle et M le milieu de [AB]

1)Soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC)

Déterminer : $P_1(A)$; $P_1(C)$, $P_1(B)$, $P_1(M)$,

2)Soit P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

Déterminer : $P_2(A)$,, $P_2(C)$ $P_2(B)$, $P_2(M)$

Réponse : 1) soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC)

On a $A \in (AC)$ et $(AC) \cap (BC) = \{C\}$ donc

$P_1(A) = C$

On a $B \in (BC)$ donc B est invariante par la projection P_1 donc $P_1(B) = B$

On a $C \in (BC)$ donc C est invariante par la projection P_1 donc $P_1(C) = C$

Soit $M' = P_1(M)$ **on a** M le milieu de [AB]

La parallèle à (AC) passant par M passe forcément par le milieu de [BC]
donc M' est le milieu de [BC]

1) soit: P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

On a $A \in (AC)$ donc $P_2(A) = A$

On a $C \in (AC)$ donc C est invariante par la projection P_2 donc $P_2(C) = C$

On a $B \in (BC)$ et $(AC) \cap (BC) = \{C\}$ donc $P_2(B) = C$

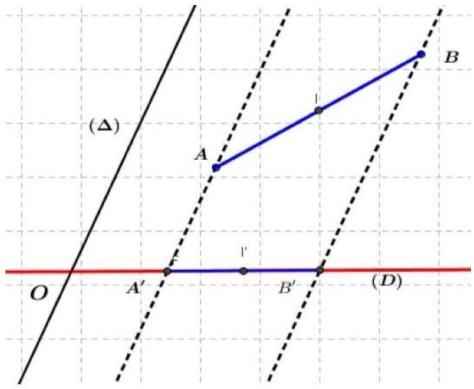
On a M le milieu de [AB] donc **la** parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en son milieu soit: M'' **ce** milieu donc $P_2(M) = M''$

3. La projection d'un segment et de son milieu sur une droite parallèlement à une autre droite

Soi A et B deux points du plan et A' et B' sont respectivement leur projection P sur sur (D) parallèlement à (Δ)

Propriété 1 : L'image du segment [AB] par la projection P **est le** segment $[A'B']$ et on écrit : $P([AB]) = [A'B']$

Propriété 2 : Si I est le milieu de [AB] alors $P(I) = I'$ **est** le milieu du segment $[A'B']$



On dit que la projection conserve les milieux

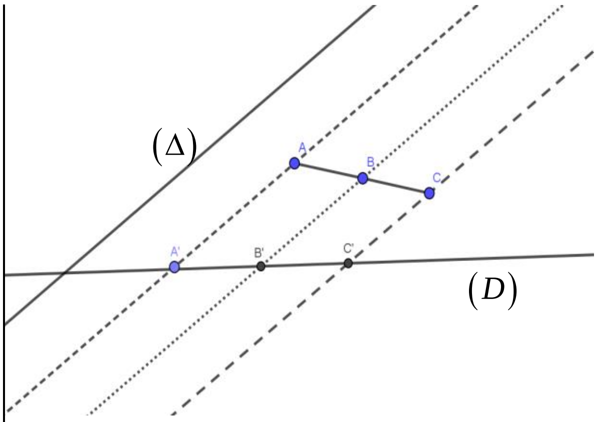
Remarque :

on a : $P([AB]) = [A'B']$ donc pour tout point M du segment [AB] : $P(M) = M' \in [A'B']$

II)Théorème de Thales et son théorème réciproque

1)Théorème de Thales :

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un pont , et soient A ; B; C trois points alignés du plan tel que (AB) et (Δ) ne sont pas parallèles



soient A' ; $B'; C'$ respectivement les projetés des points A ; B; C sur (D) parallèlement à (Δ)

Alors : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$

2)Théorème de Thales avec les vecteurs :

Soient A' ; $B'; C'$ respectivement les projetés des points A ; B ; C sur droite (D) parallèlement à (Δ)

Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ avec $k \in \mathbb{R}$ Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$

On dit que la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

Exercice2 : Soients ABC est un triangle et M un point définie par : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1)Construire le point M' le projeté de M sur la droite (AC) parallèlement à (BC)

2)Montrer que $\overrightarrow{AM'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et en déduire que $\overrightarrow{MM'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Réponse : 1) soit: P la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

On a $A \in (AC)$ donc A est invariante par la projection P donc $P(A) = A$

On a $C \in (BC)$ donc C est invariante par la projection P donc $P(C) = C$

On a aussi : $P(B) = C$

Et puisque $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

Alors : $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

On a

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

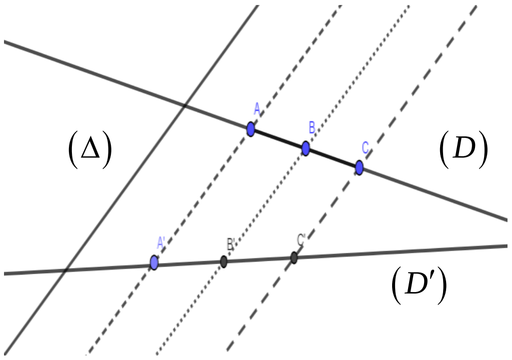
3)le théorème réciproque de Thales

Soient (D) et (D') deux droites non parallèles a une troisième (Δ) , et soient A ; B deux points de la droite (D) tel que A' et B' respectivement les projetés des points A ; B sur (D') parallèlement à (Δ)

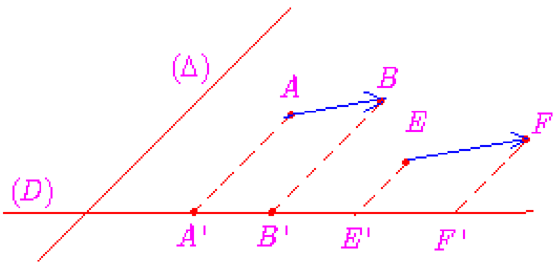
Si C un point de la droite (D) et C' un point de la droite (D') tel que $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

Et les points A ; B et C sont dans le même ordre sur la droite (D) que les points A'; B' et C' sur la droite (D')

Alors : le point C' est la projection de C sur la droite (D') parallèlement à (Δ) et on a $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$



Propriété :soit $P = P_{(D;\Delta)}$



Si : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{EF}$ **et** $P(B) = B'$ **;** $P(A) = A'$ **;** $P(E) = E'$ **et** $P(F) = F'$

Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{E'F'}$

On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

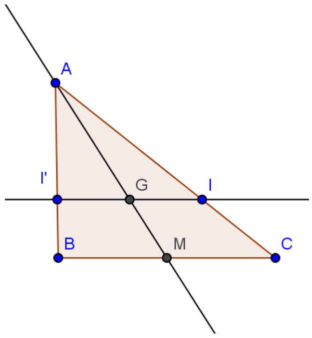
Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes et A ; B; C ; D des points distinctes et $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ ET si A' ; B';C' et D' respectivement les projetés des points A ; B ; C et D sur la droite (Δ) parallèlement à (Δ')

Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{C'D'}$

On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Exercice3 : (réciproque de Thales):

Soient ABC est un triangle et I et I' deux points tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



1) Montrer que I' **est** par la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) soit M est le milieu de [BC] ; la droite (AM) coupe la droite (II') en G

Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

Réponse : 1) On a $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $\left\|\overrightarrow{AI}\right\| = \left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right\|$

donc $AI = \frac{2}{3}AC$ donc $\frac{AI}{AC} = \frac{2}{3}$ ①

Et on a : $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\left\|\overrightarrow{AI'}\right\| = \left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right\|$ donc $AI' = \frac{2}{3}AB$ donc $\frac{AI'}{AB} = \frac{2}{3}$ ②

D'après ① et ② on a $\frac{AI}{AC} = \frac{AI'}{AB}$ et d'après la réciproque de Thales : $(II') \parallel (BC)$

Et puisque (AB) coupe (II') en I' donc I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) On a I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC) et M est le milieu de [BC] Mq : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$???

On considère P la projection sur (AM)

Parallèlement à (BC)

On a $A\in(AM)$ donc A est invariante par la projection P donc $P(A)=A$ ❶

la parallèle à (BC) passant par C est (BC) elle coupe (AM) en M donc $P(C)=M$ ❷

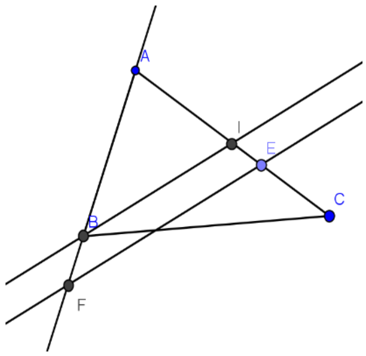
la parallèle à (BC) passant par I est (II') elle coupe (AM) en G donc $P(I)=G$ ❸

Et on a en plus $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ❹ donc D'après ❶ et ❷ et ❸ et ❹ on a $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ car la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

Exercice4 : Soient ABC est un triangle et I le milieu de $[AC]$. E un point de (AC) tel que : $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ et $P_{((AB);(IB))}(E)=F$

Faire une figure et montrer que : $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Solution :



On a : $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ **et** I le milieu de $[AC]$

Donc : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IC}$ donc **:** $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$

Et on a : $P_{((AB);(IB))}(E)=F$ **et** $P_{((AB);(IB))}(I)=B$ **et** $P_{((AB);(IB))}(A)=A$

Et puisque le la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Exercice5 : Soient ABC est un triangle et I le milieu de $[AC]$

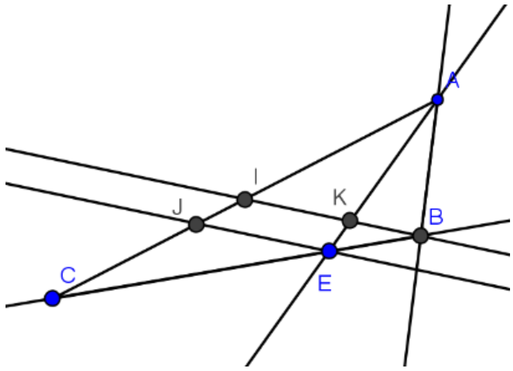
E un point tel que : $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BE}$

La droite qui passe par E et parallèle a (IB) coupe (AC) **en** J

1)montrer que $\overrightarrow{IC}=4\overrightarrow{IJ}$ et en déduire que : $\overrightarrow{AJ}=5\overrightarrow{IJ}$

2)si $(IB)\cap(AE)=\{K\}$ montrer que : $\overrightarrow{AE}=5\overrightarrow{KE}$

Solution : 1)soit $P_{((AC);(IB))}$ la projection sur (AC) parallèlement à (IB)



On a : $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BE}$ et $P_{((AC);(IB))}(B)=I$ **et** $P_{((AC);(IB))}(E)=J$ **et** $P_{((AC);(IB))}(C)=C$ et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{IC}=4\overrightarrow{IJ}$

La déduction :

On a $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}$ et I le milieu de $[AC]$

Donc : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IC}$ et par suite :

$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IJ}=4\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IJ}=5\overrightarrow{IJ}$

2) soit $P_{((AE);(IB))}$ la projection sur (AE) parallèlement à (IB)

On a : $\overrightarrow{AJ}=5\overrightarrow{IJ}$ **et** $P_{((AE);(IB))}(A)=A$ et $P_{((AE);(IB))}(I)=K$ **et** $P_{((AE);(IB))}(J)=E$

et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{AE}=5\overrightarrow{KE}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien